

(26.09)

Dans cette séance $\rightarrow$ application linéaire + exemples

- $\rightarrow$ noyau et image d'une application linéaire
- $\rightarrow$ matrice canonique d'une application linéaire
- $\rightarrow$ opérations sur les matrices (produit, transposée, ...)

Pas les sections 4.5, 4.7, 4.8, ni Lemme 6 ni Thm 4.46 $\rightarrow$ pour plus tard!

§ 4.6. Applications linéaires

Déf. 4.39 Soit $f: V \rightarrow V'$ une application entre deux EV V et V' . On dit que f est linéaire si $f(v + \lambda w) = f(v) + \lambda f(w)$, $\forall v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Rk. H1 C'est la même que la déf 3.13 pour $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dans ce cas, on a aussi $f(0_V) = 0_{V'}$.

Exemple 4.43* Soit $V = \mathbb{P}$ et $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(p) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p(1) \end{pmatrix}$ pour $p \in \mathbb{P}$. Alors f est linéaire:

$$f(p + \lambda q) = \begin{pmatrix} \int_0^1 (p + \lambda q)(t) dt \\ (p + \lambda q)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 (p(t) + \lambda q(t)) dt \\ p(1) + \lambda q(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \int_0^1 q(t) dt \\ q(1) \end{pmatrix} = f(p) + \lambda f(q) \quad \checkmark$$

Def 4.44 Pour $T: V \rightarrow V'$ application linéaire, on définit le noyau de T :

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_{V'}\} = \underbrace{T^{-1}(\{0\})}_{\text{image réciproque / inverse / préimage de } \{0\} \text{ par } T.}$$

Lemme fondamental (lemme 7) Si $T: V \rightarrow V'$ est une application linéaire, alors

$$T \text{ injective} \iff \text{Ker}(T) = \{0_V\}$$

(Preuve) Exercice (voir les notes). $\square$

$$\bigcirc = \text{nul} \quad \emptyset = \text{ensemble vide}$$

Quelques propriétés en plus

(Lemme 8) Si $T: V \rightarrow V'$ une application linéaire, alors

- $\text{Ker}(T)$ est un SEU de V ;
- $\text{Im}(T)$ est un SEU de V' .

(Lemme 9) Si T est une application linéaire bijective, alors T^{-1} est une application linéaire.

(Preuve) [pour $\text{Ker}(T)$] Comme $T(0_V) = 0_{V'}$, alors $0_V \in \text{Ker}(T) \Rightarrow (\text{SEU.1}) \checkmark$
E.d. $v, w \in \text{Ker}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(v + \lambda w) \stackrel{T \text{ lin.}}{=} T(v) + \lambda T(w) \stackrel{v, w \in \text{Ker}(T)}{=} 0_{V'} + \lambda \cdot 0_{V'} = 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'} \quad (\text{SEU.2}) \checkmark$

Rappel: $\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\} \subseteq V'$

Chapitre 5 $\leftarrow$ § 5.1 et § 5.5 pour l'instant

(ou matrice canonique de T)

Déf B Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On définit la matrice de T via

$$[T] = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}} \right\} \text{m lignes}, \text{ où } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Thm. 5.1 Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors

$$(*) \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

↑ produit matrice-vecteur canonique

En plus, $[T]$ est la seule matrice qui satisfait (*): si A est de taille $m \times n$ et $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $[T] = A$. (unicité)

(Preuve de (*)) $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) \stackrel{\substack{\text{def } T \\ T \text{ lin}}}{=} x_1 T(\bar{e}_1) + \dots + x_n T(\bar{e}_n) \stackrel{\substack{\text{def } [T] \\ \text{§ 5.1}}}{=} \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \square$

(Unicité $\rightarrow$ exercice)

Chapitres 6 + 7 + §5.5

Opérations sur les matrices

Def C $M_{m \times n}(\mathbb{R}) := \{ A \text{ matrice de taille } m \times n \text{ à coefficients dans } \mathbb{R} \}.$

Pour $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \dots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \dots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{pmatrix}}_{A+B \text{ (somme)}} \text{ et } \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}}_{\lambda \cdot A \text{ (produit par } \lambda)}$$

Def 6.2 $A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit le produit $A \cdot B$

par la matrice $C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ donnée par

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} = A_{i,1} B_{1,j} + \dots + A_{i,m} B_{m,j}$$

pour $i \in [1, p]$ et $j \in [1, n]$.

Def. 5.21 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit la matrice transposée $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

par $(A^T)_{ji} = A_{ij}$ pour $i \in [1, m]$ et $j \in [1, n]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ? & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad ?$$

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 7 = ?$$